

非齐次 Besov 和 Triebel - Lizorkin 空间上的 $T1$ 定理*

韩彦昌

(华南师范大学数学科学学院, 广东 广州 510631)

摘 要: 应用 Calderon 再生公式和非齐次 Besov 和 Triebel - Lizorkin 空间的 Plancherel - Polya 刻画在齐型空间上建立了非齐次 Besov 和 Triebel - Lizorkin 空间的 $T1$ 定理。这些结果在 $\mathbf{R}^d$ 也是新的。

关键词: $T1$ 定理; Besov 和 Triebel - Lizorkin 空间; Calderon 再生公式; Plancherel - Polya 不等式

中图分类号: O174.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 04-0001-05

1 定义与定理

最近 Calderon - Zygmund 算子在各种变化的函数空间上有界性的研究被认为是有重大意义的课题。最著名的结果是文 [1] 中 David 和 Journé 的 $T1$ 定理。 $T1$ 定理又被推广到 Besov 和 Triebel - Lizorkin 空间。这一活跃的研究领域的丰富成果参见文 [2-5] 等。

本文主要目的是在齐型空间上应用非齐次离散的 Calderon 再生公式和 Besov 与 Triebel - Lizorkin 空间的 Plancherel - Polya 刻画建立以下空间

$$B_p^{\alpha,q}(X), \frac{d}{d+\alpha} < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty, 0 < \alpha < \varepsilon;$$

$$F_p^{\alpha,q}(X), \frac{d}{d+\alpha} < p < \infty, \frac{d}{d+\alpha} < q \leq \infty, 0 < \alpha < \varepsilon;$$

$$B_p^{\alpha,q}(X), \frac{d}{d+\alpha+\varepsilon} < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty, -\varepsilon < \alpha$$

$$< 0; \text{以及 } F_p^{\alpha,q}(X), \frac{d}{d+\alpha+\varepsilon} < p < \infty, \frac{d}{d+\alpha+\varepsilon}$$

$< q \leq \infty, -\varepsilon < \alpha < 0$ 上的 $T1$ 定理, 其中 $\varepsilon > 0$ 。粗略地说, 如果算子 T 的核仅满足一半的光滑性和消失矩条件, 则 T 在上面指标范围的 $B_p^{\alpha,q}(X)$ 和 $F_p^{\alpha,q}(X)$ 上是有界的。

叙述本文的主要结果之前, 先回顾齐型空间上 Calderon - Zygmund 算子理论和非齐次 Besov 和 Triebel - Lizorkin 空间的一些必要事实。

集合 X 上的拟距离 $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ 满足:

- (1) $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- (2) 如果 $x, y \in X$, 则 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (3) 存在常数 $A \in [1, \infty)$, 对任意的 $x, y, z \in X$, $\rho(x, y) \leq A[\rho(x, z) + \rho(z, y)]$ 。

任意的拟距离定义了以球 $B(x, r) = \{y \in X: \rho(x, y) < r\}$, $\forall x \in X, \forall r > 0$ 为基的拓扑。

定义 1^[6] 若 $d > 0$, $0 < \theta \leq 1$, 齐型空间 $(X, \rho, \mu)_{d,\theta}$ 是集合 X 赋予拟距离 ρ 和 X 上的非负 Borel 测度 μ , $\text{supp } \mu = X$, 存在常数 $0 < C < \infty$, 对任意的 $0 < r < \text{diam } X$, $x, x', y \in X$,

$$\mu(B(x, r)) \approx r^d \quad (1)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x', y)| \leq C\rho(x, x')^\theta [\rho(x, y) + \rho(x', y)]^{1-\theta} \quad (2)$$

T 是从 $C_0^\eta(X)$ 到 $(C_0^\eta(X))'$ 的连续线性算子, 对任意支集不交的试验函数 $f, g \in C_0^\eta(X)$, 在下述意义下联系于核 $K(x, y)$,

$$\langle Tf, g \rangle = \iint g(x) K(x, y) f(y) d\mu(x) d\mu(y)$$

若 $K(x, y)$ 满足点态条件

$$\text{当 } \rho(x, y) \neq 0, |K(x, y)| \leq C\rho(x, y)^{-d} \quad (3)$$

$$\text{当 } \rho(x, y) \geq 1, |K(x, y)| \leq C\rho(x, y)^{-d-\sigma} \quad (4)$$

$$\text{当 } \rho(x, x') \leq \rho(x, y)/2A \text{ 时,}$$

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq C\rho(x, x')^\varepsilon \rho(x, y)^{-d-\varepsilon} \quad (5)$$

$$\text{当 } \rho(y, y') \leq \rho(x, y)/2A \text{ 时,}$$

$$|K(x, y) - K(x, y')| \leq C\rho(y, y')^\varepsilon \rho(x, y)^{-d-\varepsilon} \quad (6)$$

其中 $\varepsilon \in (0, \theta)$, $\sigma > 0$ 。

称 T 具有弱有界性质, 记为 $T \in WBP$, 是指对于所有的 f 和 g 属于 $C_0^\eta(X)$, 具支集的距离不超过 r , 满足 $|\langle Tf, g \rangle| \leq Cr^{d+2\eta} \|f\|_{C_0^\eta(X)} \|g\|_{C_0^\eta(X)}$ 。

定义 2^[7] 算子序列 $\{S_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ 称为恒等逼近, 是指 $S_k(x, y)$, 即 S_k 的核是从 $X \times X$ 到 $\mathbf{C}$ 的函数, 存在 $\varepsilon \in (0, \theta)$, $C > 0$, 使得对任意的 $k \in \mathbf{N}$, $x, x', y, y' \in X$, 有

* 收稿日期: 2008-01-03

基金项目: 国家自然科学基金专项天元基金资助项目 (10726071)

作者简介: 韩彦昌 (1973 年生), 男, 副教授; E-mail: hanyc291@163.com

$$|S_k(x, y)| \leq C \frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^{-k} + \rho(x, y))^{d+\varepsilon}} \quad (7)$$

当 $\rho(x, x') \leq \frac{1}{2A}(2^{-k} + \rho(x, y))$ 时,

$$|S_k(x, y) - S_k(x', y)| \leq C \left(\frac{\rho(x, x')}{2^{-k} + \rho(x, y)} \right)^{\varepsilon} \frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^{-k} + \rho(x, y))^{d+\varepsilon}} \quad (8)$$

当 $\rho(y, y') \leq \frac{1}{2A}(2^{-k} + \rho(x, y))$ 时,

$$|S_k(x, y) - S_k(x, y')| \leq C \left(\frac{\rho(y, y')}{2^{-k} + \rho(x, y)} \right)^{\varepsilon} \frac{2^{-k\varepsilon}}{(2^{-k} + \rho(x, y))^{d+\varepsilon}} \quad (9)$$

且还成立

$$|[S_k(x, y) - S_k(x', y)] - [S_k(x', y) - S_k(x', y')]| \leq C \left(\frac{\rho(x, x')}{2^{-k} + \rho(x, y)} \right)^{\varepsilon'} \left(\frac{\rho(y, y')}{2^{-k} + \rho(x, y)} \right)^{\varepsilon'} \frac{2^{-k\sigma}}{(2^{-k} + \rho(x, y))^{d+\sigma}} \quad (10)$$

其中 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, $\sigma = \varepsilon - \varepsilon' > 0$, $\rho(x, x') \leq \frac{1}{2A}(2^{-k}$

$+ \rho(x, y))$, $\rho(y, y') \leq \frac{1}{2A}(2^{-k} + \rho(x, y))$;

$$\int S_k(x, y) d\mu(x) = 1 = \int S_k(x, y) d\mu(y) \quad (11)$$

定义 3^[4] 固定两个指标 $0 < \beta < \theta, \gamma > 0$ 。定义于 X 上的函数 f 称之为在中心在 $x_0 \in X$ 宽度为 $d > 0$ 的 (β, γ) 试验函数, 是指 f 满足:

$$|f(x)| \leq C \frac{d^{\gamma}}{(d + \rho(x, x_0))^{d+\gamma}} \quad (12)$$

且当 $\rho(x, x') \leq \frac{1}{2A}(d + \rho(x, x_0))$ 时, 成立

$$|f(x) - f(x')| \leq C \left(\frac{\rho(x, x')}{d + \rho(x, x_0)} \right)^{\beta} \frac{d^{\gamma}}{(d + \rho(x, x_0))^{d+\gamma}} \quad (13)$$

如果 f 是中心在 x_0 带有宽度 $d > 0$ 的 (β, γ) 型试验函数, 则记为 $f \in M(x_0, d, \beta, \gamma)$, 且 f 在 $M(x_0, d, \beta, \gamma)$ 里的范数定义为

$$\|f\|_{M(x_0, d, \beta, \gamma)} = \inf \{C \geq 0: (12) \text{ 和 } (13) \text{ 成立} \}$$

用 $M(\beta, \gamma)$ 来定义 $M(0, 1, \beta, \gamma)$ 里函数的全体。容易发现对于所有的 $x_1 \in X$ 和 $d > 0$, 在范数等价的意义下有 $M(x_1, d, \beta, \gamma) = M(\beta, \gamma)$ 。进一步, 也容易验证 $M(\beta, \gamma)$ 是 Banach 空间。称 $M(\beta, \gamma)$ 的线性泛函 L 为有界的, 如果存在常数 c 使得对所有的 $f \in M(\beta, \gamma)$ 有 $|L(f)| \leq c \|f\|_{M(\beta, \gamma)}$ 。全体从 $M(\beta, \gamma)$ 到 $\mathbb{C}$ 的有界线性泛函组成 $M(\beta, \gamma)$ 的对偶空间 $(M(\beta, \gamma))'$ 。

下面也需要 Christ^[8] 在齐型空间中给出的类似于欧式空间二进方体的构造。

引理 1 X 是齐型空间, 则存在开集族 $\{Q_{\alpha}^k \subset$

$X: k \in \mathbb{N}, \alpha \in I_k\}$ 其中 I_k 是 (可能有限) 指标集, 常数 $\delta \in (0, 1), C_1, C_2 > 0$, 使得

(1) 对任意固定的 k 和 $\alpha \neq \beta, \mu(X \setminus \cup_{\alpha} Q_{\alpha}^k) = 0$, 成立 $Q_{\alpha}^k \cap Q_{\beta}^k = \emptyset$;

(2) 对任意的 α, β, k, l , 当 $l \geq k$ 时, 要么 $Q_{\alpha}^k \subset Q_{\beta}^l$, 要么 $Q_{\alpha}^k \cap Q_{\beta}^l = \emptyset$;

(3) 对任意的 (k, α) , $l < k$, 存在唯一的 β 使得 $Q_{\alpha}^k \subset Q_{\beta}^l$;

(4) $\text{diam}(Q_{\alpha}^k) \leq C_1 \delta^k$;

(5) 任意 Q_{α}^k 包含 $B(z_{\alpha}^k, C_2 \delta^k)$, 其中 $z_{\alpha}^k \in X$ 。

事实上, 可以想象 Q_{α}^k 是直径大约为 δ^k , 中心在 z_{α}^k 的二进方体。下文假设 $\delta = 1/2$ 。关于如何去掉此限制参见文献 [4]。对于 $k \in \mathbb{N}, \tau \in I_k, Q_{\tau}^{k, \nu}, \nu = 1, \dots, N(k, \tau, M)$, 定义为方体集 $Q_{\tau}^{k+M} \subset Q_{\tau}^k$, 其中 M 为固定足够大的正整数。

现在通过恒等逼近介绍非齐次 Besov 空间和 Triebel - Lizorkin 空间。

定义 4 假设 $-\theta < \alpha < \theta, \beta$ 和 γ 满足

$$\max(0, -\alpha + \max(0, d(1/p - 1))) < \beta < \theta, 0 < \gamma < \theta.$$

$\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是恒等逼近, $D_0 = S_0, D_k = S_k - S_{k-1}$, 其中 $k = 1, 2, \dots$ 。令 M 为固定的足够大的正整数。当

$$\max\left(\frac{d}{d + \theta}, \frac{d}{d + \theta + \alpha}\right) < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty \text{ 时, 非}$$

齐次 Besov 空间 $B_p^{\alpha, q}(X)$ 定义为所有 $f \in (M(\beta, \gamma))'$ 满足 $\|f\|_{B_p^{\alpha, q}(X)} = \left\{ \sum_{\tau \in I_0} \sum_{\nu=1}^{N(0, \tau, M)} \mu(Q_{\tau}^{0, \nu}) \right\}^{1/p}$

$$\left[m_{Q_{\tau}^{0, \nu}}(|D_0(f)|) \right]^p \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [2^{k\alpha} \|D_k(f)\|_{L_p(X)}]^q \right\}^{1/q}$$

$$< \infty \text{ 的集合。当 } \max\left(\frac{d}{d + \theta}, \frac{d}{d + \theta + \alpha}\right) < p < \infty,$$

$$\max\left(\frac{d}{d + \theta}, \frac{d}{d + \theta + \alpha}\right) < q \leq \infty \text{ 时, 非齐次 Triebel -}$$

$$\text{Lizorkin 空间 } F_p^{\alpha, q}(X) \text{ 定义为所有 } f \in (M(\beta, \gamma))' \text{ 满}$$

$$\text{足 } \|f\|_{F_p^{\alpha, q}(X)} = \left\{ \sum_{\tau \in I_0} \sum_{\nu=1}^{N(0, \tau, M)} \mu(Q_{\tau}^{0, \nu}) [m_{Q_{\tau}^{0, \nu}}(|D_0(f)|)]^p \right\}^{1/p}$$

$$+ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [2^{k\alpha} \|D_k(f)\|_{L_p(X)}]^q \right\}^{1/q} < \infty \text{ 的集合, 其中}$$

$$m_{Q_{\tau}^{0, \nu}}(|D_0(f)|) \text{ 是 } |D_0(f)| \text{ 在 } Q_{\tau}^{0, \nu} \text{ 的平均。}$$

$$\text{非齐次 Besov 和 Triebel - Lizorkin 空间上的 } T1 \text{ 定理文 [3] 已获得。粗略地讲, } T \text{ 是 } B_p^{\alpha, q}, 1 \leq p, q$$

$$\leq \infty, 0 < \alpha < \varepsilon; F_p^{\alpha, q}, 1 < p, q < \infty, 0 < \alpha < \varepsilon \text{ 上有界的, 如果 } T \text{ 满足弱有界性质, } T1 = 0, \text{ 且公式}$$

$$(3) - (5) \text{ 成立。本文主要获得下面的结果。}$$

$$\text{定理 1 若 } 0 < \varepsilon \leq \theta, 0 < \alpha < \varepsilon. \text{ 假设 } T1 =$$

$$0, T \in WBP, \text{ 当 } \sigma > \max\left(0, d\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right) \text{ 时, 算}$$

子 T 的核 $K(x, y)$ 满足公式 (3) - (5), 则 T 是 $B_p^{\alpha, q}(X)$, $\frac{d}{d+\alpha} < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ 和 $F_p^{\alpha, q}(X)$, $\frac{d}{d+\alpha} < p < \infty$, $\frac{d}{d+\alpha} < q \leq \infty$ 上有界的。

定理 2 若 $0 < \varepsilon \leq \theta$, $-\varepsilon < \alpha < 0$. 假设 $T1 = 0$, $T \in WBP$, 当 $\sigma > \max\left(0, d\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right)$ 时, 算子 T 的核 $K(x, y)$ 满足公式 (3) - (5), 则 T 是 $B_p^{\alpha, q}(X)$, $\frac{d}{d+\alpha+\varepsilon} < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ 和 $F_p^{\alpha, q}(X)$, $\frac{d}{d+\alpha+\varepsilon} < p < \infty$, $\frac{d}{d+\alpha+\varepsilon} < q \leq \infty$ 上有界的。

文 [3] 给出了定理 1 和 2 的统一处理。准确地说, 证明了当 $0 < \alpha < \varepsilon$, $p, q > 1$ 时的上述结果, 使用的主要工具是连续的 Calderon 再生公式。当 $-\varepsilon < \alpha < 0$, $p, q > 1$ 时, 利用对偶的方法给以处理。不管怎样连续的 Calderon 再生公式不能处理当 p, q 不满足所列的条件即 p 或 q 中有一个小于 1 (或甚至等于 1) 的情况。本文的关键之处在于给出一个统一的处理, 使得对上述结果以及在 p, q 同时小于 1 时都有效, 也就是使用在文 [6, 9] 中得到的离散的 Calderon 表示定理以及 Besov 与 Triebel - Lizorkin 空间的 Plancherel - Polya 特征刻画而给出一个简单直接的证明。在文 [5] 中, Triebel - Lizorkin 空间 $F_p^{\alpha, q}(X)$, $\max\left\{\frac{d}{d+\varepsilon}, \frac{d}{d+\alpha+\varepsilon}\right\} < p < \infty$, $\max\left\{\frac{d}{d+\varepsilon}, \frac{d}{d+\alpha+\varepsilon}\right\} < q \leq \infty$, $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$ 上的 T1 定理在条件 T 具有弱有界性质, $T1 = T^*1 = 0$ 和条件公式 (3) - (6) 下被建立。进而由实内插理论建立非齐次 Besov 空间 $B_p^{\alpha, q}(X)$, $\max\left\{\frac{d}{d+\varepsilon}, \frac{d}{d+\alpha+\varepsilon}\right\} < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$ 上的 T1 定理。在相同的条件下, 比较文 [5] 的结果, 指标 p 和 q 的取值范围从 $\frac{d}{d+\varepsilon}$ 变为 $\frac{d}{d+\alpha}$, $0 < \alpha < \varepsilon$, 导致指标范围缩小的原因是对应结果的光滑性和消失矩性条件减少了一半。

2 定理 1 和 2 的证明

在文 [6] 中离散 Calderon 再生公式的基础上, 类似于文 [3] 的引理 4.1 的讨论可以得到下述引理。

引理 2 在离散的 Calderon 再生公式^[6]和定理 1 的假设下成立。

(1) 当 $k \in N$, $\tau' \in I_0$, $\nu' \in \{1, 2, \dots, N(0, \tau', M)\}$, $y_{\tau'}^{0, \nu'}$ 是 $Q_{\tau'}^{0, \nu'}$ 中任意固定点, $x \in X$,

$$|D_k T \tilde{D}_{Q_{\tau'}^{0, \nu'}}(x)| \leq \frac{C(1+k)2^{-k\varepsilon}}{(1+\rho(x, y_{\tau'}^{0, \nu'}))^{d+\sigma'}} \quad (14)$$

其中当 $k=0$ 时, $\sigma' = \sigma$; 当 $k \in \{1, 2, \dots\}$, $\sigma' = \varepsilon$;

(2) 当 $k \in N$, $k' \in \{1, 2, \dots\}$, $x, y \in X$ 时有,

$$|D_k T \tilde{D}_{k'}(x, y)| \leq C(1+|k-k'|)(2^{(k-k')\varepsilon'} \wedge 1) \frac{2^{-(k' \wedge k)\varepsilon'}}{(2^{-(k' \wedge k)} + \rho(x, y))^{d+\varepsilon'}} \quad (15)$$

引理 3 在离散的 Calderon 再生公式^[6]和定理 2 的假设成立。

(1) 当 $k \in N$, $\tau' \in I_0$, $\nu' \in \{1, 2, \dots, N(0, \tau', M)\}$, $y_{\tau'}^{0, \nu'}$ 是 $Q_{\tau'}^{0, \nu'}$ 中任意固定点, $x \in X$,

$$|D_k T \tilde{D}_{Q_{\tau'}^{0, \nu'}}(x)| \leq \frac{C}{(1+\rho(x, y_{\tau'}^{0, \nu'}))^{d+\sigma'}} \quad (16)$$

其中当 $k=0$ 时, $\sigma' = \sigma$; 当 $k \in \{1, 2, \dots\}$, $\sigma' = \varepsilon$;

(2) 当 $k \in N$, $k' \in \{1, 2, \dots\}$, $x, y \in X$,

$$|D_k T \tilde{D}_{k'}(x, y)| \leq \frac{2^{-(k' \wedge k)\varepsilon'} C(1+|k-k'|)(2^{(k-k')\varepsilon'} \wedge 1)}{(2^{-(k' \wedge k)} + \rho(x, y))^{d+\varepsilon'}} \quad (17)$$

定理 1 的证明 由文 [6] 中的离散 Calderon 再生公式定理 1.5, 对 $f \in M(\beta, \gamma)$, 有

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{B_p^{\alpha, q}(X)} &\leq \left\{ \sum_{\tau \in I_0} \sum_{\nu=1}^{N(0, \tau, M)} \left[m_{Q_{\tau}^{0, \nu}} \left(\sum_{\tau' \in I_0} \sum_{\nu'=1}^{N(0, \tau', M)} \mu(Q_{\tau'}^{0, \nu'}) \cdot |D_0 T \tilde{D}_{Q_{\tau'}^{0, \nu'}}(\cdot)| m_{Q_{\tau'}^{0, \nu'}}(|D_0(f)|) \right) \right]^p \right\}^{1/p} + \\ &\left\{ \sum_{\tau \in I_0} \sum_{\nu=1}^{N(0, \tau, M)} \left[m_{Q_{\tau}^{0, \nu}} \left(\sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{\tau' \in I_{k'}} \sum_{\nu'=1}^{N(k', \tau', M)} \mu(Q_{\tau'}^{k', \nu'}) \cdot |D_0 T \tilde{D}_{k'}(\cdot, y_{\tau'}^{k', \nu'})| |D_{k'}(f)(y_{\tau'}^{k', \nu'})| \right) \right]^p \right\}^{1/p} + \\ &\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{\tau \in I_l} \sum_{\nu=1}^{N(l, \tau, M)} \left[\inf_{z \in Q_{\tau}^{l, \nu}} \left(\sum_{\tau' \in I_0} \sum_{\nu'=1}^{N(0, \tau', M)} \mu(Q_{\tau'}^{0, \nu'}) \mu(Q_{\tau}^{l, \nu}) \right)^{-\frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}} |D_l T \tilde{D}_{Q_{\tau}^{l, \nu}}(z)| m_{Q_{\tau}^{l, \nu}}(|D_0(f)|) \right]^p \right)^{\frac{q}{p}} \right\}^{1/q} + \\ &\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{\tau \in I_l} \sum_{\nu=1}^{N(l, \tau, M)} \left[\inf_{z \in Q_{\tau}^{l, \nu}} \left(\sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{\tau' \in I_{k'}} \sum_{\nu'=1}^{N(k', \tau', M)} \mu(Q_{\tau'}^{k', \nu'}) \mu(Q_{\tau}^{l, \nu}) \right)^{-\frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}} |D_l T \tilde{D}_{k'}(z, y_{\tau'}^{k', \nu'})| |D_{k'}(f)(y_{\tau'}^{k', \nu'})| \right]^p \right)^{\frac{q}{p}} \right\}^{1/q} = \\ &A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \end{aligned}$$

A_4 的估计类似于文 [2] 中的定理 1。下面获得 A_1 , A_2 和 A_3 的估计。

由 (14) 式当 $p > 1$ 时, 利用 Hölder 不等式; 当 $p \leq 1$ 时, 利用 $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, 有

$$A_1 \leq C \left\{ \sum_{\tau \in I_0} \sum_{\nu=1}^{N(0, \tau, M)} \sum_{\tau' \in I_0} \sum_{\nu'=1}^{N(0, \tau', M)} \left[\frac{1}{(1+\rho(y_{\tau}^{0, \nu}, y_{\tau'}^{0, \nu'}))^{d+\sigma'}} \right]^{p \wedge 1} \cdot [m_{Q_{\tau'}^{0, \nu'}}(|D_0(f)|)]^p \right\}^{1/p} \leq C \left\{ \sum_{\tau \in I_0} \sum_{\nu=1}^{N(0, \tau, M)} \right\}.$$

$$[m_{Q_{\tau}^{0,\nu}}(|D_0(f)|)]^p \}^{1/p} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^{\alpha}(X)}$$

应用 (15) 式, 有

$$\begin{aligned} A_2 &\leq C \left\{ \sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{\tau' \in I_{k'}}^{N(k',\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \sum_{\tau \in I_0} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} \right. \\ &\quad \left. [2^{-k'd} 2^{-k'\alpha} (1+k')] \frac{1}{(1+\rho(y_{\tau}^{0,\nu}, y_{\tau'}^{0,\nu'}))^{d+\varepsilon}} \right]^{p\wedge 1} \cdot \\ &\quad (\mu(Q_{\tau'}^{k',\nu'})^{-\frac{\alpha}{d}} |D_{k'}(f)(y_{\tau'}^{k',\nu'})|)^p \}^{1/p} \leq \\ &\quad C \left\{ \sum_{k'=1}^{\infty} ([2^{-k'd} 2^{-k'\alpha} (1+k')]^{p\wedge 1} 2^{k'd})^{\frac{q}{p}\wedge 1} \sum_{\tau' \in I_{k'}}^{N(k',\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \right. \\ &\quad \left. (\mu(Q_{\tau'}^{k',\nu'})^{-\frac{\alpha}{d}+\frac{1}{p}} \sup_{z \in Q_{\tau'}^{k',\nu'}} |D_{k'}(f)(z)|)^p \right\}^{1/q} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^{\alpha}(X)} \end{aligned}$$

应用 (14) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} A_3 &\leq C \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (2^{-dl} \sum_{\tau \in I_l}^{N(l,\tau,M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} \sum_{\tau' \in I_0} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{0,\nu'}) \cdot \right. \\ &\quad \left. [m_{Q_{\tau}^{0,\nu}}(|D_0(f)|)]^p \left[\frac{2^{l\alpha}(1+l)2^{-l\varepsilon}}{(1+\rho(y_{\tau}^{l,\nu}, y_{\tau'}^{0,\nu'}))^{d+\varepsilon}} \right]^{p\wedge 1} \right)^{q/p} \}^{1/q} \leq \\ &\quad C \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} [2^{l\alpha}(1+l)2^{-l\varepsilon}]^{(p\wedge 1)q/p} \left(\sum_{\tau \in I_0}^{N(l,\tau,M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} \mu(Q_{\tau}^{0,\nu'}) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. [m_{Q_{\tau}^{0,\nu}}(|D_0(f)|)]^{p/q} \right)^{1/q} \leq C \|f\|_{B_{p,q}^{\alpha}(X)} \right. \end{aligned}$$

类似地, 对 $f \in M(\beta, \gamma)$, 有

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{F_{p,q}^{\alpha}(X)} &\leq \left\{ \sum_{\tau \in I_0}^{N(0,\tau,M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} [m_{Q_{\tau}^{0,\nu}} \left(\sum_{\tau' \in I_0}^{N(0,\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{0,\nu'}) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. |D_0 T \tilde{D}_{Q_{\tau}^{0,\nu}}(\cdot) m_{Q_{\tau}^{0,\nu}}(|D_0(f)|)]^p \right]^{1/p} + \right. \\ &\quad \left\{ \sum_{\tau \in I_0}^{N(0,\tau,M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} [m_{Q_{\tau}^{0,\nu}} \left(\sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{\tau' \in I_{k'}}^{N(k',\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{k',\nu'}) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. |D_0 T \tilde{D}_{k'}(\cdot, y_{\tau'}^{k',\nu'})| |D_{k'}(f)(y_{\tau'}^{k',\nu'})|)^p \right]^{1/p} \cdot \right. \\ &\quad \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\tau \in I_l}^{N(l,\tau,M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} \left[\inf_{z \in Q_{\tau}^{l,\nu}} \sum_{\tau' \in I_0}^{N(0,\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{l,\nu'})^{-\alpha/d} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. |D_l T \tilde{D}_{Q_{\tau}^{l,\nu}}(z) m_{Q_{\tau}^{l,\nu}}(|D_0(f)|) \chi_{Q_{\tau}^{l,\nu}}|^q \right]^{1/q} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\tau \in I_l} \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{\nu=1}^{N(l,\tau,M)} \left[\inf_{z \in Q_{\tau}^{l,\nu}} \left| \sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{\tau' \in I_{k'}}^{N(k',\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{k',\nu'}) \mu(Q_{\tau}^{l,\nu})^{-\alpha/d} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. D_l T \tilde{D}_{k'}(\cdot, y_{\tau'}^{k',\nu'})(z) D_{k'}(f)(y_{\tau'}^{k',\nu'}) \chi_{Q_{\tau}^{l,\nu}} \right|^q \right]^{1/q} \right\}^{1/q} = \\ &\quad B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \end{aligned}$$

其中 $y_{\tau'}^{k',\nu'}$ 是 $Q_{\tau'}^{k',\nu'}$ 中任意点。

B_1 和 B_4 的估计分别类似于上面的 A_1 和文 [2] 中的定理 2。下面只剩下建立 B_2 和 B_3 的估计。由 (15) 式, 当 $p > 1$, 利用 Hölder 不等式; 当 $p \leq 1$ 时, 利用 $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, Fefferman - Stein 向量

值不等式^[10], 可得

$$\begin{aligned} B_2 &\leq C \left\| \left\{ \left[\sum_{k'=1}^{\infty} 2^{-k'd} 2^{-k'\alpha} [1+k'] 2^{k'd/r} [M \left(\sum_{\tau' \in I_{k'}}^{N(k',\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{k',\nu'})^{-\alpha/d} |D_{k'}(f)(y_{\tau'}^{k',\nu'}) \chi_{Q_{\tau'}^{k',\nu'}} \right)^r]^{1/r} \right]^{1/q} \right\} \right\|_{L^p(X)} \leq \\ &\quad C \left\| \left\{ \sum_{k'=1}^{\infty} [2^{-k'd} 2^{-k'\alpha} [1+k'] 2^{k'd/r}]^{q\wedge 1} [M \left(\sum_{\tau' \in I_{k'}}^{N(k',\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{k',\nu'})^{-\alpha/d} |D_{k'}(f)(y_{\tau'}^{k',\nu'}) \chi_{Q_{\tau'}^{k',\nu'}} \right)^{q/r}]^{1/q} \right\} \right\|_{L^p(X)} \leq \\ &\quad C \left\| \left\{ \sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{\tau \in I_{k'}}^{N(k',\tau',M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} [\mu(Q_{\tau}^{k',\nu'})^{-\alpha/d} |D_{k'}(f)(y_{\tau}^{k',\nu'})| \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \chi_{Q_{\tau}^{k',\nu'}} \right]^q \right\}^{1/q} \right\|_{L^p(X)} \leq C \|f\|_{F_{p,q}^{\alpha}(X)} \end{aligned}$$

其中 $\frac{d}{d+\alpha} < r < \min(p, q, 1)$ 。

由 (14) 式, 当 $p > 1$ 时, 利用 Hölder 不等式; 当 $p \leq 1$ 时, 利用 $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, 文献 [11] 中引理 A. 2, 有

$$\begin{aligned} B_3 &\leq C \left\{ \int \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\tau \in I_l}^{N(l,\tau,M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} \chi_{Q_{\tau}^{l,\nu}} [2^{l\alpha}(1+l)2^{-l\varepsilon} \sum_{\tau' \in I_0}^{N(0,\tau',M)} \frac{1}{(1+\rho(x, y_{\tau'}^{0,\nu'}))^{d+\varepsilon}} m_{Q_{\tau}^{l,\nu}}(|D_0(f)|)]^{p/q} d\mu(x) \right)^{1/p} \cdot \right. \\ &\quad \left. \leq C \left\{ \int \left(\sum_{l=1}^{\infty} [2^{l\alpha}(1+l)2^{-l\varepsilon}]^q [M \left(\sum_{\tau' \in I_0}^{N(0,\tau',M)} \sum_{\nu'=1}^{N(0,\tau',M)} \mu(Q_{\tau'}^{0,\nu'}) \cdot \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. m_{Q_{\tau}^{0,\nu}}(|D_0(f)|) \chi_{Q_{\tau}^{0,\nu}} \right)^r(x)]^{q/r} d\mu(x) \right\}^{1/p} \leq \\ &\quad C \left\{ \int [M \left(\sum_{\tau \in I_0}^{N(0,\tau,M)} \sum_{\nu=1}^{N(0,\tau,M)} m_{Q_{\tau}^{0,\nu}}(|D_0(f)|) \chi_{Q_{\tau}^{0,\nu}} \right)^r(x)]^{p/r} \cdot \right. \\ &\quad \left. d\mu(x) \right\}^{1/p} \leq C \|f\|_{F_{p,q}^{\alpha}(X)} \end{aligned}$$

其中使用了 Hardy - Littlewood 极大函数在 $L^{p/r}(X)$ 上的有界性。从而完成了定理 1 的证明。

定理 2 的证明 定理 2 和定理 1 证明的主要不同是用引理 3 替代引理 2。我们留下这些细节给读者。

(下转第 10 页)

Tumor Classification by Partial Least Squares and Maximal Margin Criterion Using Gene Expression Data

HU Yu¹, YANG Wen-hui²

(1. Guangdong Vocational College of Industry & Commerce, Guangzhou 510510, China;

2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: In order to deal with the high-dimensional and small sample size problem of gene expression data, a new two-phases framework based on PLS and MMC is developed. This procedure involves feature extraction using partial least squares (PLS) and classification using maximal margin criterion (MMC). The proposed method is applied to six public microarray data sets. Experimental results demonstrate that this method is an effective and stable discrimination approach for tumor classification with gene expression data.

Key words: microarray data; gene selection; feature extraction; partial least squares; maximal margin criterion

(上接第 4 页)

参考文献:

- [1] DAVID G, JOURNE J L. A boundedness criterion for generalized Calderon - Zygmund operators [J]. Ann of Math, 1984, 120: 371 - 397.
- [2] DENG D G, HAN Y S. T_1 Theorem for Besov and Triebel - Lizorkin spaces [J]. Science in China Ser A Math, 2004, 34: 657 - 664.
- [3] HAN Y S, LU S Z, YANG D C. Inhomogeneous Besov and Triebel - Lizorkin space on spaces of homogeneous type [J]. Approx Theory Appl, 1999, 15: 37 - 65.
- [4] HAN Y S, SAWYER E T. Littlewood - Paley theory on spaces of homogeneous type and classical function spaces [J]. Mem Amer Math Soc, 1994, 110: 1 - 126.
- [5] YANG D C. T_1 Theorem on Besov and Triebel - Lizorkin spaces on spaces of homogeneous type and their applications [J]. Zeitschrift für Analysis ihre Anwendungen, 2003, 22: 53 - 72.
- [6] DENG D G, HAN Y S, YANG D C. Inhomogeneous Plancherel - Polya type inequality on spaces of homogeneous type and their applications [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2004, 6: 221 - 243.
- [7] HAN Y S. Plancherel - Polya type inequality on spaces of homogeneous type and its applications [J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126: 3315 - 3327.
- [8] CHRIST M. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral [J]. Colloq Math, 1990, 60/61: 601 - 628.
- [9] HAN Y S, LU S Z, YANG D C. Inhomogeneous discrete Calderon reproducing formulas for spaces of homogeneous type [J]. J Fourier Anal Appl, 2001, 7: 571 - 600.
- [10] FEFERMAN C, STEIN E M. Some maximal inequalities [J]. Amer J Math, 1971, 93: 107 - 115.
- [11] FRAZIER M, JAWERTH B. A discrete transform and decompositions of distribution spaces [J]. J Funct Anal, 1990, 93: 34 - 170.

T_1 Theorem for Inhomogeneous Besov and Triebel - Lizorkin Spaces

HAN Yan-chang

(Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: The T_1 theorems for the inhomogeneous Besov and Triebel - Lizorkin spaces are established by the discrete Calderon type reproducing formula and the Plancherel - Polya characterization for the inhomogeneous Besov and Triebel - Lizorkin spaces on space of homogeneous type. These results are new even for $\mathbb{R}^d$.

Key words: T_1 theorem; Besov and Triebel - Lizorkin spaces; Calderon reproducing formula; Plancherel - Polya inequalities